



TITLE:

# 高密度な粉体斜面流の密度プロファイル (複雑流体の構造形成と崩壊の数理)

AUTHOR(S):

御手洗, 菜美子; 中西, 秀

---

CITATION:

御手洗, 菜美子 ...[et al]. 高密度な粉体斜面流の密度プロファイル (複雑流体の構造形成と崩壊の数理). 数理解析研究所講究録 2005, 1413: 60-69

ISSUE DATE:

2005-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/26201>

RIGHT:

## 高密度な粉体斜面流の密度プロファイル

理化学研究所フロンティア研究システム 御手洗 菜美子 (Namiko Mitarai)

Frontier Research System, RIKEN

九州大学大学院理学研究院物理学部門 中西 秀 (Hiizu Nakanishi)

Department of Physics, Faculty of Science, Kyushu University

### 1 はじめに：斜面上の粉体流

斜面上の粉体は、粉体の特徴的な動力学を見ることができるもっとも単純な系の一つである。傾斜角が十分大きいと、速度勾配が大きく低密度な流れが実現する。傾斜角を小さくしていくと、流れは遅く高密度になり、安息角以下では止まってしまう。また、斜面の粗さによって、流れの様相が変化することもある。例えば、平らで摩擦のある斜面上で粉体を流すと、速度勾配は斜面の近くでは生じるが、パルクではほとんど生じないことが多い。一方、凹凸のある斜面の上では、パルクでもずりがかかった流れが実現する。

希薄で速い流れにおいては、粒子間相互作用は瞬間的な非弾性衝突が支配的である。このような粉体“気体”については、非弾性剛体球の“気体分子”運動論を用いた定量的記述が試みられ [1]、ある程度の成功をおさめてきた [2, 3]。一方、密度が高い流れにおいては、瞬間的な衝突に加え、長時間の接触による摩擦や、接触した粒子の不均一なネットワークに沿って形成される応力鎖の影響などがあらわれるといわれているが、その振舞いを記述するモデルは確立していない。また、“希薄で速い流れ”と“高密度で遅い流れ”の区別は明確でなく、運動論に基づくモデルの適用範囲も明らかではない。本稿では、このような粉体流の性質を調べるモデル系として、斜面上の粉体流を例にとり、我々の今までの研究から、傾斜角や密度、境界条件の変化させたときの流れの違いを概観する [3, 4]。特に、凹凸のある斜面上での高密度な粉体流については、最近興味深い実験及び数値実験結果が報告され、理論解析も盛んになりつつある。そこで、後半では、高密度な粉体斜面流の数値実験結果を、次元解析及び運動論で解析した最近の研究を詳しく紹介する [5]。

### 2 希薄な衝突流と高密度な摩擦流

まず、瞬間的な衝突が支配的な流れ (collisional flow、衝突流) と、長時間の接触による摩擦が支配的な流れ (frictional flow、摩擦流) の違いをみてみよう。衝突流と摩擦流の概念はよく定義されたものではないが、もし違いがあるなら、それがあらわれるべき量の一つは、粒子間の接触時間であろう。接触時間は一般に粒子の硬さに依存するが、剛体極限でどうなるのか、衝突流と摩擦流で違いがあるかは、興味ある問題である。そこで、凹凸のある斜面上の希薄な速い流れ (図 1(a)) と、平らな斜面上の高密度な遅い流れ (図 1(c)) という、明らかに違ってみえる 2 つの流れについて、粒子間の反発係数を一定に保ったまま硬い極限をとった場合の接触時間の変化を、数値実験で調べた [4]。

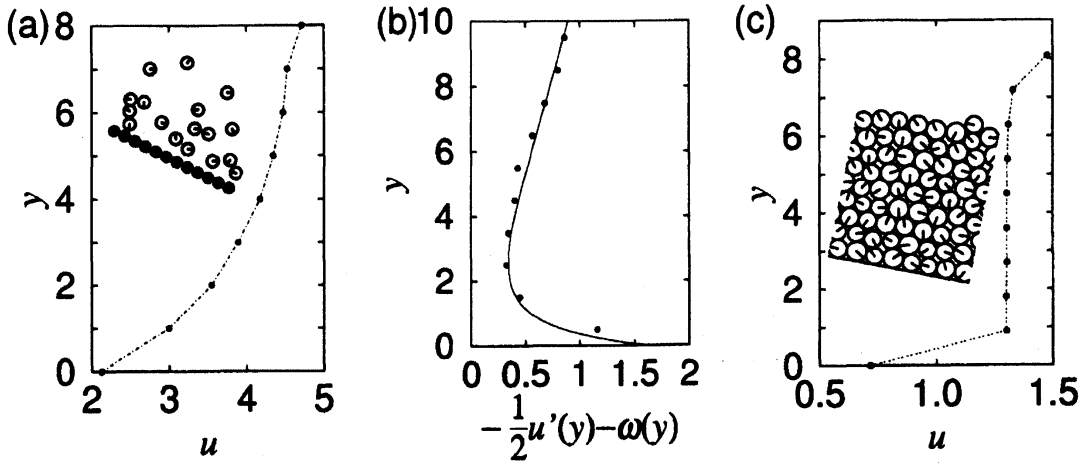


図 1: 衝突流における速度 (a)、と渦度と角速度の差 (b)、及び摩擦流における速度 (c) の深さ  $y$  依存性 ( $y=0$  が床)。 (a) と (c) のインセットにスナップショットを示した。

数値実験に採用するのは、粒子を球で表し、接触したときに弾性力と散逸力が働く軟体球 (soft-sphere) モデルである。粉体粒子  $i$  ( $j$ ) が、質量  $m_i$  ( $m_j$ )、直径  $\sigma_i$  ( $\sigma_j$ )、慣性モーメント  $I_i$  ( $I_j$ ) を持つとする。粒子  $i$  と  $j$  がそれぞれ位置  $\mathbf{r}_i$  と  $\mathbf{r}_j$  にあつて接触 ( $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  として  $|\mathbf{r}_{ij}| < \sigma$ ) しており、その時の速度と角速度がそれぞれ  $\mathbf{c}_i$  と  $\mathbf{c}_j$ 、 $\boldsymbol{\omega}_i$  と  $\boldsymbol{\omega}_j$  であつたとき、粒子間に働く力は次のように表される：接触点の相対速度  $\mathbf{v}_{ij}$  は、法線ベクトル  $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}| = (n_x, n_y, 0)$  を用いて

$$\mathbf{v}_{ij} = (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j) + \mathbf{n} \times \left( \frac{\sigma_i}{2} \boldsymbol{\omega}_i + \frac{\sigma_j}{2} \boldsymbol{\omega}_j \right), \quad (1)$$

と与えられる。時刻  $t_0$  で接触が始まったとき、時刻  $t$  での法線方向の相対速度  $v_n$ 、接線方向の相対速度  $v_t$ 、接線方向の相対的な位置のずれ  $u_t$  は、

$$v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{ij}, \quad v_t = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_{ij}, \quad u_t = \int_{t_0}^t v_t dt, \quad (2)$$

となる。ここで、接線ベクトル  $\mathbf{t} = (-n_y, n_x, 0)$  を定義した。すると、粒子  $i$  から粒子  $j$  に働く法線方向および接線方向の力  $F_{ij}^n$  と  $F_{ij}^t$  は、

$$F_{ij}^n = 2Mk_n \left( \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} - |\mathbf{r}_{ij}| \right) - 2M\eta_n v_n, \quad (3)$$

$$F_{ij}^t = \min(|h_t|, \mu|F_n|) \text{sign}(h_t) \quad (4)$$

で与えられる。ただし、 $h_t = -2Mk_t u_t - 2M\eta_t v_t$  で、 $M = m/2$  は換算質量である。

このモデルは、力が粒子同士の重なり及び相対速度に対して線形に働くため、二体の衝突のときの反発係数と接触時間を解析的に求めることができ、法線方向の反発係数  $e_p$  と二体衝突の接触時間  $\tau_c$  はそれぞれ

$$e_p = \exp \left( -\frac{\pi\eta_n}{\sqrt{2k_n - \eta_n^2}} \right), \quad \tau_c = \frac{\pi}{\sqrt{2k_n - \eta_n^2}} \quad (5)$$

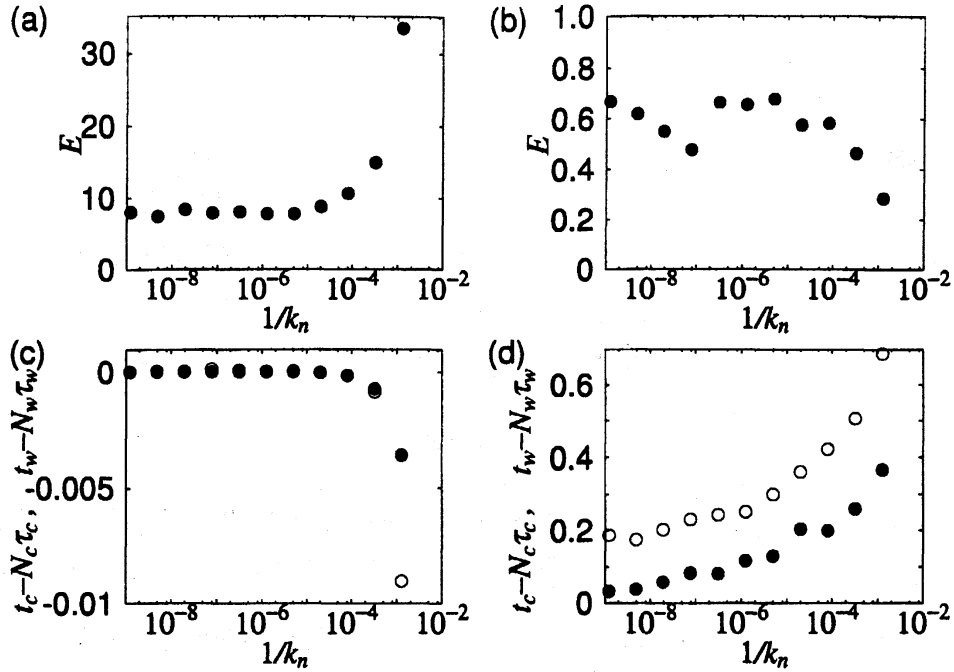


図 2: 一粒子当たりの平均エネルギー  $E$  (衝突流 (a)、摩擦流 (b)), 単位時間当たりの粒子間の衝突回数  $N_c$  (黒丸) 及び単位時間あたりの接触時間と衝突がすべて二体衝突だったときの接触時間の差 (粒子間衝突は黒丸、粒子と床の衝突は白丸。衝突流 (c)、摩擦流 (d))。

と与えられる。この関係を用いて、反発係数  $e_p$  が一定になるように  $\eta_n$  を変化させながら粒子の弾性のパラメータ  $k_n$  を大きくする (粒子を硬くする) ことで、 $e_p$  一定の剛体極限をとることができる。このとき、(5) 式で与えられる二体衝突の接触時間  $\tau_c$  は、 $1/\sqrt{k_n}$  に比例し、 $k_n \rightarrow \infty$  が確かに接触時間ゼロの剛体極限となっている。なお、接線方向の反発係数はクーロン摩擦のため定数ではないが、すべりがおきない場合 ( $|h_t| < \mu|F_n|$ ) の接線方向の反発係数  $\beta_0$  は定数となるようにパラメータを選べる。

上述のモデルを用いて、2次元系で  $e_p = \beta_0 = 0.7, \mu = 0.5$  として数値実験を行なった結果を示す。なお、衝突流では粒子は直径  $\sigma$  の同一の円板としたが、摩擦流では、完全な結晶化を避けるため、直径を  $0.8\sigma$  と  $\sigma$  の間で一様分散させた。以下のデータは、粒子直径  $\sigma$ 、粒子質量  $m$ 、そして  $\sqrt{\sigma/g}$  ( $g$  は重力加速度) を単位とする単位系で与える。

図 2(a) は、衝突流における粒子一個当たりの平均の運動エネルギーの、粒子の硬さ  $k_n$  依存性である。横軸が  $1/k_n$  であり、粒子が十分硬ければ ( $1/k_n \lesssim 10^{-5}$ ) エネルギーが硬さに依存しないことがわかる。この領域では速度のプロファイル (図 1(a)) も硬さに依存しなかった。一方、摩擦流の平均運動エネルギーの硬さ依存性 (図 2(b)) や、速度のプロファイル (図 1(c)) は、衝突流に比べるとずっとゆらぎが大きい、やはり粒子が十分硬い範囲 ( $1/k_n \lesssim 10^{-5}$ ) では、系統だった硬さ依存性は示さなかった。

しかし、衝突回数や接触時間は硬さに大きく依存する。単位時間当たりの衝突回数は、衝突流では硬い極限でほぼ一定になるのに対し、摩擦流では  $k_n$  に対して冪的に発散し

た。このときの粒子の単位時間あたりの接触時間  $t_c$  と、粒子間の衝突がすべて二体衝突であった場合の接触時間  $N_c t_c$  の差を硬さに対してプロットすると、衝突流では粒子が硬くなるにつれて急速にゼロに近づくのに対し (図 2(c))、摩擦流では、エネルギーなどが系統的な依存性を示さない  $1/k_n \lesssim 10^{-5}$  の範囲でも硬さ依存性をしめすものの、 $k_n \rightarrow \infty$  の極限で有限の値に近づく傾向が見られた (図 2(d))。

これらの結果が示すように、平均流速のような流れの様相は、粒子が十分硬ければ、いつも硬さに系統的に依存しなくなる。しかし、接触時間を調べると、剛体極限で有限に残る場合とゼロとなる場合があり、それぞれ摩擦流と衝突流に対応するのだろう。

平らな斜面上の摩擦流は、バルクではほとんどずりがかかっておらず (図 1(c))、また有限の接触時間が剛体極限で残ることからもわかるように、剛体球の運動論では記述できない。一方で、凹凸のある斜面上の希薄な衝突流は、硬い極限で非弾性剛体球系に漸近し、運動論に基づく流体モデルが適用できることが期待される。ただし、床の近くでは回転が強く励起されるため、速度場の渦度 ( $\nabla \times \mathbf{v}/2$ ) と個々の粒子の角速度  $\omega$  の差が有限になり、しかも図 1(a) のように密度が低いと、そのずれがなかなか緩和されない。このような場合、角速度まで含めて流れを記述するには、粒子の回転を独立に取扱う極性流体モデルが必要である [3]。衝突流における、 $(\nabla \times \mathbf{v}/2)_z - \omega$  のプロットを図 1(b) に示したが、特に床の近くで大きな値をとる。実線は、初等輸送論で見積もった輸送係数を採用した極性流体モデルによるもので、数値実験を再現できる。渦度と角速度のずれは、密度が適度に高いと、床から十分離れれば非常に小さくなることが多いが、境界近くの振る舞いまで記述するには極性流体モデルは有効ではないかと期待される。

### 3 凹凸のある斜面を流れる高密度な粉体流

斜面に凹凸がある場合には、高密度でも、バルクにずりがある程度かかった流れが実現できることが知られている。このような高密度な斜面流は、§2 のようにはっきりした衝突流とも摩擦流とも言いにくい。また、凹凸がある斜面で高密度な流れを実現するには粒子数がかなり大きい必要があり、§2 と同様に (平らな斜面上の摩擦流よりはずっと小さくなるであろう) 接触時間の剛体極限をみることは大変難しい。高密度な斜面流について、非弾性衝突を主に考えれば十分か、それとも接触による応力鎖なども重要かは明らかでなく、そのレオロジーもまだ理解されていない。しかし最近、高密度な斜面流の、よく制御された実験や大規模な数値実験が行なわれ、その性質が少しずつ明らかになってきた。本節では、高密度な粉体斜面流のレオロジーについての研究を紹介する [5]。

#### 3.1 バグノルド則と密度プロファイル

高密度な粉体流のレオロジーはわかっていないと述べたが、そこで広く成り立つと信じられている法則が一つある。それは、速度勾配が  $\dot{\gamma}$  であるとき、せん断応力  $S$  が  $\dot{\gamma}^2$  に比例するというバグノルド則 [6] である。このバグノルド則は次のような次元解析から

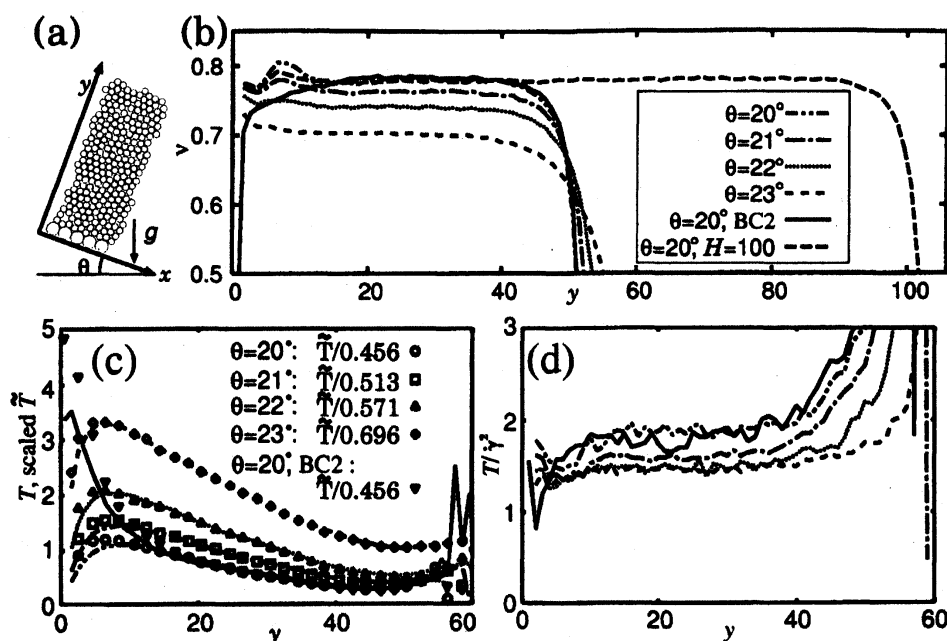


図 3: 斜面流の座標系 (a) 及び様々な傾斜角  $\theta$  での体積占有率  $\nu$  (b)、粉体温度  $T$  (c)、 $T/\dot{\gamma}^2$  (d) の深さ  $y$  依存性。全体の深さ  $H = 50$ 、床の境界条件 BC 1 の結果が主であるが、比較のため傾斜角  $\theta = 20^\circ$  については  $H = 100$  および境界条件 BC2 の結果も示した。図 (c) では、バルクで  $\tilde{T} \propto T$  がほぼ成り立っていることを示すため、温度  $T$  (線) と共に回転温度  $\tilde{T}$  を 0.456 ( $\theta = 20^\circ$ ), 0.513 ( $\theta = 21^\circ$ ), 0.571 ( $\theta = 22^\circ$ ), 0.696 ( $\theta = 23^\circ$ ) でそれぞれ割ったものがマークでプロットされている。

求められる。数密度  $n$  で分布する (代表的な) 直径  $\sigma$ 、質量  $m$  の剛体粒子で構成された粉体に、一様にずりがかかって速度勾配  $\dot{\gamma}$  が生じている状況を考える。すると、系を特長づける変数  $\sigma, m, n, \dot{\gamma}$  のうち、時間の次元を含むものは速度勾配  $\dot{\gamma}$  だけである。したがって、せん断応力  $S = S(\sigma, m, n, \dot{\gamma})$  が正しい次元を持つためには、

$$S = A(\nu) m \sigma^{2-d} \dot{\gamma}^2 \quad (6)$$

が要求され、バグノルド則が導かれる。ここで、 $d$  は空間次元、 $\nu \propto n \sigma^d$  は体積占有率で、 $A(\nu)$  は体積占有率の関数である。この次元解析は、粉体粒子の変形の時間スケールが速度勾配の時間スケールと同程度になる場合や、仮定された一様なせん断流が不安定でシアerbンドなどができる場合には成り立たない。斜面上の流れの場合、重力加速度  $g$  が新たに加わる。しかし、重力によって粒子の軌道が曲がる効果が目立たない程度であればストレスには影響がないであろう。十分高密度な流れのバルクでは、平均自由時間が、重力によって粒子直径程度落下する時間スケールよりずっと短いため、やはりバグノルド則が成り立つことが期待され、実際多くの斜面流の実験及び数値実験によってバグノルド則が成り立っていることが確かめられている [6, 7, 8]。

最近シルベルトらは、分子動力学法を用いて高密度な粉体斜面流 (図 3) の大規模な数

値実験を行ない、バルクでは密度プロファイルが深さ方向に変化せずほぼ一定であり、しかもその密度の値は流れの全体の深さ  $H$  や床の凹凸の様子には依らず、斜面の傾斜角  $\theta$  だけで決まることを見いだした [8]。流れが深くなるほど、自重によって圧力が高くなることを考えると、これは一見不思議な振舞いである。

実は、密度が深さによらず一定になること自体は、バグノルド則を導いた次元解析を圧力に拡張することで理解できる。圧力 (垂直応力)  $N$  は、せん断応力  $S$  と同じ次元を持つので、同様の次元解析からやはり  $\dot{\gamma}^2$  に比例し、

$$N = B(\nu) m \sigma^{2-d} \dot{\gamma}^2 \quad (7)$$

の形をもつことが期待される。ただし、比例係数にあらわれる体積占有率の関数  $B(\nu)$  の関数形は、一般に  $S$  にあらわれた  $A(\nu)$  とは異なる。一方、斜面上の定常流では、重力は応力とつり合っているので、

$$S/N = \tan \theta \quad (8)$$

が任意の深さで成り立っている。(8) 式に (6) 式と (7) を代入すると、

$$A(\nu)/B(\nu) = \tan \theta \quad (9)$$

が得られる。(9) 式は、バグノルド則が成り立っているバルクでは任意の深さで成り立つので、バルクの密度プロファイルは一定となり、体積占有率  $\nu$  の値は、(9) 式によって傾斜角  $\theta$  だけで決まることになる。

### 3.2 運動論の枠組みとバグノルド則

バグノルド則は定性的には一定の密度プロファイルを説明するものの、 $A(\nu)$ 、 $B(\nu)$  の関数形を知るには、具体的な構成関係式が必要である。粉体流の構成関係式を与える知られている理論としては、非弾性衝突する剛体球の運動論がある。もちろん、高密度な斜面流は、そもそも非弾性衝突だけで記述できるのかという点から明らかでなく [9]、また分子カオスといった運動論で用いられる仮定からのずれも大きいと考えられる。しかしながら、低密度では定量的に粉体流を記述できるとされる運動論が、高密度の斜面流にどの程度適用できるかを明らかにすることは、高密度な斜面流の理解の第一歩として必要であろう。そこで、ここでは、まず運動論の枠組みとバグノルド則の関係を述べ、その関係を利用して運動論に基づく構成関係式と数値実験データの定量的比較をおこなう。

運動論に基づく流体モデルでは、数密度  $n$ 、平均速度  $\mathbf{v}$ 、及び粉体温度  $T$  が場の量として取扱われる。ここで粉体温度は、個々の粒子の速度を  $\mathbf{c}$  とし、 $\langle \dots \rangle$  で平均を表すとしたとき  $T \equiv m \langle (\mathbf{c} - \mathbf{v})^2 \rangle / d$  で定義される。

せん断応力  $S$  は、 $y$  軸に垂直な断面における運動量輸送で与えられ、初等輸送論では平均自由行程 (一般に密度の関数) を  $\ell(\nu)$  として  $m \dot{\gamma} \ell(\nu) n \sqrt{T/m}$  に比例すると見積もられる。すると、せん断応力の構成関係式は、

$$S = f_2(\nu) m^{1/2} \sigma^{1-d} T^{1/2} \dot{\gamma} \quad (10)$$

という形で表される。ここで、 $f_2(\nu)$  は、体積占有率  $\nu$  及び反発係数などの物質パラメータに依存する無次元の関数である。同様な議論により、圧力  $N$ 、エネルギー散逸項  $\Gamma$ 、及び熱流  $q$  は

$$N = f_1(\nu)\sigma^{-d}T, \quad (11)$$

$$\Gamma = f_3(\nu)m^{-1/2}\sigma^{-d-1}T^{3/2}, \quad (12)$$

$$q = -f_4(\nu)m^{-1/2}\sigma^{1-d}T^{1/2}\partial_y T \quad (13)$$

と与えられる。運動論の一般的な枠組みでは、構成関係式は(10)式から(14)式の形に書くことが出来る。但し、 $f_i(\nu)$  の関数形は具体的計算における近似法などに依存する。

これらの構成関係式は、時間スケールが速度勾配  $\dot{\gamma}$  のみで決まる状況ではバグノルド則(6)式を回復する筈である。(10)式と(6)式を比較すると、温度  $T$  が  $\dot{\gamma}^2$  に比例すればバグノルド則が成り立つことがわかる。運動論の枠組みの中では、温度はエネルギー方程式

$$-\partial_y q + S\dot{\gamma} - \Gamma = 0 \quad (14)$$

で決まる。一様なせん断流のように、熱流  $q$  がゼロになる場合、(14)の第一項の熱流の発散  $\partial_y q$  はゼロになり、温度は粘性発熱  $S\dot{\gamma}$  と散逸  $\Gamma$  の釣り合いによって決まる。このとき、(10)式、(12)式を代入すると

$$T = [f_2(\nu)/f_3(\nu)] m\sigma^2\dot{\gamma}^2, \quad (15)$$

が得られる。つまり、 $T \propto \dot{\gamma}^2$  となりバグノルド則が成り立つ。斜面流の場合、熱流の発散  $\partial_y q$  はゼロではない。しかし、後述するように、バルクでは粘性発熱  $S\dot{\gamma}$  や散逸  $\Gamma$  に比較して無視できる程小さいことが数値実験で示されるので、(15)式が近似的に成り立つ。(15)、(10)、および(11)式を(8)式に代入すれば

$$\tan \theta = \sqrt{f_2(\nu)f_3(\nu)}/f_1(\nu) \quad (16)$$

が得られ、運動論で導かれた  $f_i(\nu)$  の具体的関数形を用いれば、ある傾斜角  $\theta$  での体積占有率  $\nu$  を求めることが出来る。

### 3.3 数値実験結果との比較

次に、この運動論に基づく解析と、分子動力学法による数値実験の結果を比較する。数値実験は2次元系で行い、文献[8]と同様、軟体球モデルにおいて粉体粒子を質量  $m$ 、直径  $\sigma$ 、慣性モーメント  $I = m\sigma^2/10$  の2次元円板で表した。パラメータは、粒子間の法線方向の反発係数  $e_p$  は0.92となり、すべりがおきない場合 ( $|h_t| < \mu|F_n|$  の場合) の接線方向の反発係数  $\beta_0$  は1となるように選んだ[8]。斜面流ではクーロン摩擦は重要であるが、二次元系でクーロン摩擦を考慮した運動論による構成関係式はまだ求められていない。そこで理論との比較の際には、接線方向の反発係数  $\beta$  は1とした。なお、粒子の



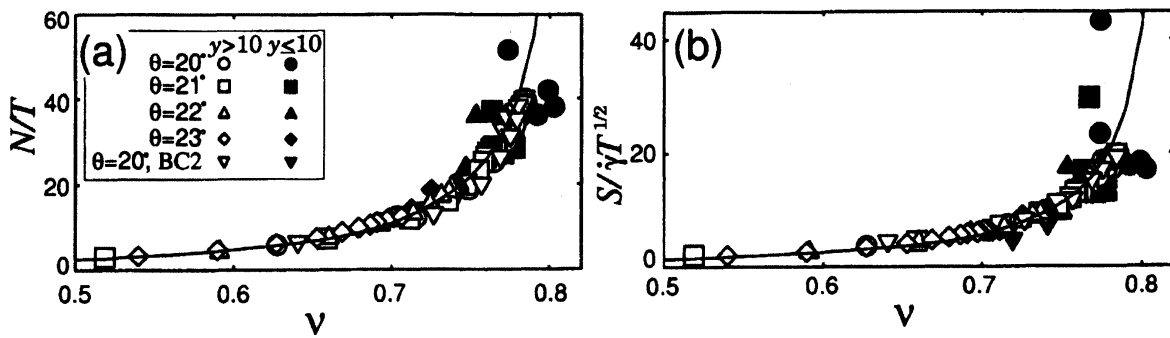


図 4: さまざまな傾斜角  $\theta$  について、 $N/T$  (a) と  $S/(\sqrt{T}\dot{\gamma})$  (b) を  $\nu$  に対してプロットしたもの。白いマークはバルクと表面のデータ、塗りつぶされたマークは床の境界近くのデータを示す。実線は運動論による  $f_1(\nu)$  (a) と  $f_2(\nu)$  (b) を示す。

硬さのパラメータ  $k_n = 2 \times 10^5$  で、これは §2 でみたように、硬さの影響が流れの振舞いにあらわれない程度に大きい値である。また、斜面には直径  $2\sigma$  の粒子を敷き詰めて粗くした (BC1 とする)。斜面の粗さがバルクの振る舞いに与える影響を調べるため、斜面に直径  $\sigma$  の粒子を敷き詰めて粗くした場合 (BC2) についても数値実験をおこなった。

図 3 に、様々な傾斜角  $\theta$  での体積占有率  $\nu$  (b)、粉体温度  $T$  (c)、 $T/\dot{\gamma}^2$  (d) の深さ  $y$  依存性をしめした。全体の深さ  $H = 50$ 、床の境界条件 BC 1 の結果が主であるが、比較のため傾斜角  $\theta = 20^\circ$  については  $H = 100$  および境界条件 BC2 の結果も示した。図 3(b) をみると、 $\nu$  がバルクでほぼ一定であり、その値は全体の深さや境界条件に依存しないことがわかる。また、これらのプロファイルから、 $|\partial_y q|$  が  $S\dot{\gamma}$  や  $\Gamma$  よりずっと小さいという、(15) 式を導いたときの前提が、成り立っていることを確かめた。

これらのデータを、法線方向の反発係数  $e_p$ 、接線方向の反発係数  $\beta$  の二次元非弾性剛体円板について求められた構成関係式 [10] と比較した。 $f_1(\nu)$ 、 $f_2(\nu)$ 、 $f_3(\nu)$  の具体的関数形は文献 [5] を参照されたい。ただここで、粒子の回転の自由度についてコメントしておく。文献 [10] の計算では、角速度場  $\omega = \langle w \rangle$  ( $w$  は個々の粒子の各速度) については  $\omega = (\nabla \times \mathbf{v})_z / 2$  が仮定されている (床の近く以外ではほぼ成り立っている [3]) ため、 $\omega$  は構成関係にあらわれない。ただし、回転温度  $\tilde{T} \equiv I \langle (w - \omega)^2 \rangle$  は関数  $f_2(\nu)$  と  $f_3(\nu)$  に  $\tilde{T}/T$  の形であらわれる。今のパラメータでは、運動論 [10] によれば  $\tilde{T}/T$  は 1 となるが、数値実験では異なる値が得られた。これには、クーロン摩擦が数値実験には入っているが、運動論では考慮されていないということが大きく寄与していると考えられる。図 3(b) には、 $T$  とともに、 $\tilde{T}$  を  $T$  とバルクで一致するよう係数で割ったものがプロットされている。それによれば  $\tilde{T}/T$  の値は傾斜角  $\theta$  に依存し、0.5 程度であったため、関数  $f_2(\nu)$  と  $f_3(\nu)$  の  $\tilde{T}/T$  には、1 と数値実験によって求められた値の両方を試した。

まず、応力の構成関係式について数値実験と比較する。図 4 には、 $N/T$  (a) と  $S/(\dot{\gamma}\sqrt{T})$  (b) が  $\nu$  に対してプロットされている。床の近く  $y < 10$  のデータはバルクや表面近くと違う傾向を示したため、塗りつぶしたマークで区別した。白いマークで示されたバルクと

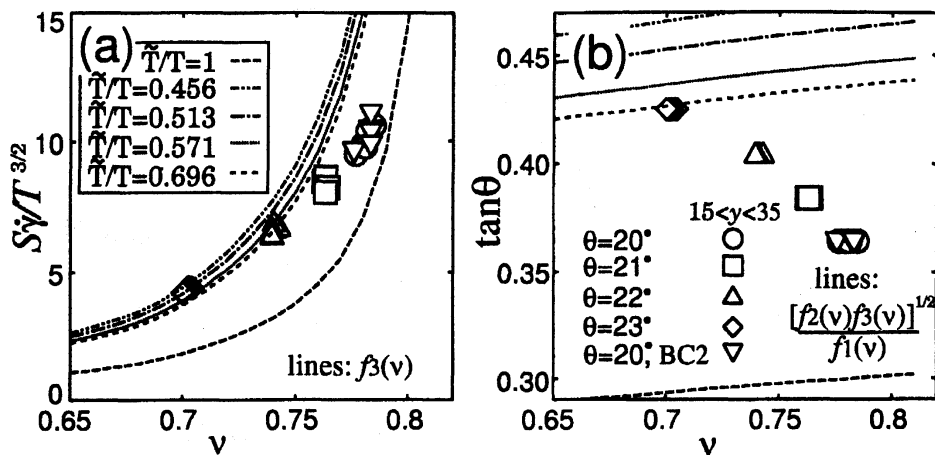


図 5: 様々な  $\theta$  についての、 $S\dot{\gamma}/T^{3/2}$  対  $\nu$  (マーク) と  $f_3(\nu)$  (線) (a), 及び  $\tan \theta$  対バルクの体積占有率 (マーク) と  $\sqrt{f_2(\nu)f_3(\nu)}/f_1(\nu)$  (線) (b) のプロット。異なる線は異なる  $\tilde{T}/T$  の値に対応している。

表面近く ( $y > 10$ ) のデータは、ほぼ一本の線にのり、運動論の枠組みが与える (10) 式や (11) 式に従っていることを示している。床の近くデータは大きくずれているが、BC1 と BC2 で違う傾向を示しており、ずれは境界の影響であると思われる。図 4 の実線は運動論に基づいた構成関係式による  $f_1(\nu)$ 、 $f_2(\nu)$  のプロットであるが、データとよく一致している。なお、 $f_2(\nu)$  にあらわれる  $\tilde{T}/T$  は、このプロットで  $0.5 \lesssim \tilde{T}/T \lesssim 1$  の範囲ではあまり影響がなかったため、 $\tilde{T}/T = 1$  の場合だけをプロットした。

エネルギー散逸率  $\Gamma$  の密度依存性  $f_3(\nu)$  は図 5(a) に示した。 $f_3(\nu)$  は、バルクで成り立っている式を利用して  $S\dot{\gamma}/T^{3/2}$  から求め、データはバルク ( $15 < y < 35$ ) のものだけを示した。線は運動論による  $f_3(\nu)$  のプロットであり、異なる線は異なる  $\tilde{T}/T$  の値に対応している (値は図中にしめした)。 $\tilde{T}/T \sim 0.5$  の場合、密度が低いときには一致は悪くないが、 $\nu = \nu_c$  に近づいたときの発散が、数値実験データの方が遅いことがわかる。この  $f_3(\nu)$  のずれは、バルクの密度の傾斜角依存性に対して大きな影響を与える。図 5(b) に、 $\tan \theta$  をバルクの密度  $\nu$  に対してプロットした。数値実験では、傾斜角が大きくなるにつれて密度が下がっている。線は運動論に基づいて  $\sqrt{f_2(\nu)f_3(\nu)}/f_1(\nu)$  をプロットしている。(16) 式によれば、これが  $\tan \theta$  と一致すべきであるが、傾斜角が大きくなるほど密度が上がるという、数値実験と定性的にも異なる結果を与えている。これは主に、 $f_3(\nu)$  の  $\nu = \nu_c$  での発散が、数値実験結果より速いことによるものである。

## 4 まとめ

本稿では、斜面上の粉体流の様々な振舞いを、数値実験とその解析を通じて紹介した。前半では、凹凸のある斜面上の希薄な衝突流と平らな斜面上の高密度な摩擦流の振舞

いの、粒子の硬さ依存性を調べた研究を紹介した [4]。粒子が十分硬ければ、速度や平均エネルギーなどの流れの振舞いは硬さに依存しなくなるが、接触時間をみると、衝突流では剛体極限で全ての衝突が接触時間ゼロの二体衝突で表されるのに対し、摩擦流では剛体極限でも二体衝突では表せない接触時間が有限に残る傾向がみられた。また、希薄な衝突流では、床の近くで個々の粒子の回転が励起され、それが極性流体モデルで記述できることも短く紹介した [3]。

後半では、凹凸のある斜面上の高密度な粉体流について、数値実験結果と運動論との比較を紹介した [5]。バルクが密度が一定になるという性質は、バグノルド則を圧力に拡張した次元解析で理解でき、運動論の枠組みを用いると、具体的な密度の傾斜角依存性が構成関係式から与えられる。数値実験データとの比較の結果、圧力とせん断応力は運動論による構成関係式でよく再現されることがわかった。しかし、エネルギー散逸率の密度依存性  $f_3(\nu)$  については、特に高密度側でデータと理論の不一致がみられ、その不一致のために運動論は斜面流の密度プロファイルを正しく再現できないことが明らかになった。ずれの原因としては、クーロン摩擦の影響、速度相関の発達などさまざまな可能性が考えられ、それを明らかにするのが今後の課題である。

この研究の一部は、理化学研究所の基礎科学特別研究員制度、及び日本学術振興会による科学研究費補助金（基盤C、16540344）の援助を受けて行われました。

## 参考文献

- [1] J. T. Jenkins and S. B. Savage, *J. Fluid Mech.* **130**, 187 (1983); C. S. Campbell, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 57 (1990).
- [2] H. Xu, M. Louge, and A. Reeves, *Continuum Mech. Thermodyn.* **15**, 321 (2003).
- [3] N. Mitarai, H. Hayakawa, and H. Nakanishi, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 174301 (2002).
- [4] N. Mitarai and H. Nakanishi, *Phys. Rev. E* **67**, 021301 (2003).
- [5] N. Mitarai and H. Nakanishi, 投稿中. (<http://xxx.arxiv.org/abs/cond-mat/0407651>)
- [6] R. A. Bagnold, *Proc. R. Soc. London A* **225**, 49 (1954).
- [7] O. Pouliquen, *Phys. Fluids* **11**, 542 (1999).
- [8] L. E. Silbert *et al.*, *Phys. Rev. E* **64**, 051302 (2002); L. E. Silbert, G. S. Grest, S. J. Plimpton, and D. Levine, *Phys. Fluids* **14**, 2637 (2002).
- [9] M. Y. Louge, *Phys. Rev. E* **67**, 061303 (2003); in *Proceedings of International Conference on Multiphase Flow, Yokohama, 2004*, paper no. K13.
- [10] J. T. Jenkins and M. W. Richman, *Phys. Fluids* **28** (1985) 3485.